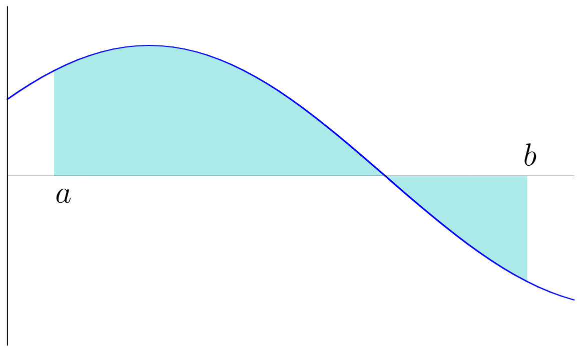
# Argomento 9
# Integrali definiti

**Premessa.** Sia $f$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$. La regione di piano compresa tra l'asse $x$, le due rette verticali di equazione $x = a$ e $x = b$, ed il grafico di $f$ è detta *trapezoide* relativo ad $f$ e ad $[a, b]$, ed è denotata con il simbolo $T(f, [a, b])$.




$T(f, [a, b])$

Nel semplice caso in cui $f(x) = C\ (\geq 0)$ il trapezoide è il rettangolo di vertici $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(b, C)$, $(a, C)$, e la sua area vale $C(b - a)$. Per una generica funzione $f$ continua in $[a, b]$ vogliamo costruire una procedura che ci permetta di *definire l'area* del trapezoide $T(f, [a, b])$ e che, nel caso $f$ sia costante, fornisca lo stesso risultato.
Dovremo fare un po' di attenzione al linguaggio. La medesima procedura ci permetterà di definire, per il trapezoide $T(f, [a, b])$ :

**i)** una nozione di **misura con segno**, legata sia all'estensione del trapezoide che alla sua posizione nel piano;

**ii)** una nozione di **area,** legata unicamente alla sua estensione, e svincolata dalla sua posizione nel piano.

Il numero che verrà indicato con il simbolo $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ - l'**integrale definito** di $f$ in $[a, b]$ - esprimerà la misura con segno del trapezoide; tuttavia, il procedimento per il suo calcolo sarà analogo a quello che ci permetterà anche di definire l'area del trapezoide[1].
Questi due concetti verranno a coincidere, quando la funzione assumerà solo valori $\geq 0$.

## 9.1 Definizione di integrale definito

Per la funzione $f(x) = c$, costante in $[a, b]$, con $c$ numero reale qualsiasi, il trapezoide $T(f, [a, b])$ è un rettangolo, con due vertici sull'asse $x$, contenuto nel semipiano superiore o inferiore a seconda che $c$ sia positivo o negativo; la sua **misura con segno** è *definita* dal numero $c(b - a)$, mentre la sua area dal numero $|c|(b - a)$. Così, i due numeri coincidono se $c \geq 0$, mentre sono opposti nel caso $c < 0$. La misura con segno risente del fatto che il rettangolo si possa trovare nel semipiano inferiore, mentre l'area dà peso all'effettiva estensione della regione.

[1]Il simbolo di integrale qui utilizzato non ha, per ora, legami con il simbolo utilizzato nell'Arg. 8. Nel Corollario 9.6 si chiarirà perchè si utilizza lo stesso simbolo.

Vogliamo utilizzare questo esempio per definire la nozione di misura con segno (e di area) anche per il trapezoide di una generica funzione $f$ continua in un intervallo $[a, b]$.
Grazie al teorema di Weierstrass (vd. Arg. 5) la funzione $f$ assume massimo assoluto $M$ e minimo assoluto $m$ in $[a, b]$. In Fig. 1 è rappresentato il caso in cui $0 \leq m \leq f(x) \leq M$, ed è immediato osservare che il trapezoide $T(f, [a, b])$ è contenuto in un rettangolo la cui misura con segno vale $M(b-a)$, e contiene un rettangolo avente misura con segno $m(b-a)$. In Fig. 2 invece abbiamo il caso $m \leq f(x) \leq M \leq 0$, ed il trapezoide è compreso tra due rettangoli aventi misura con segno $m(b-a)$ e $M(b-a)$.

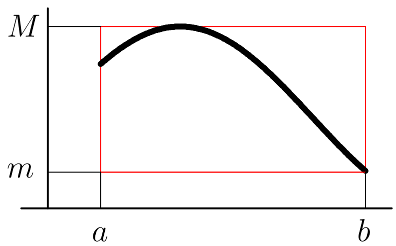


Fig. 1

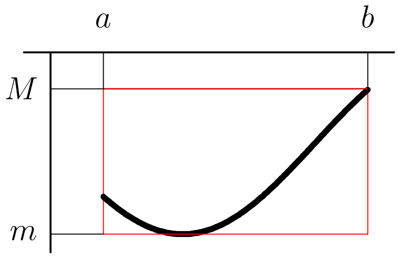


Fig. 2

Comunque, la relazione $m(b-a) \leq M(b-a)$ è sempre vera, ed intuitivamente vogliamo ottenere per la misura con segno di $T(f, [a, b])$ un valore compreso tra questi.

### ⧫ Somme superiori ed inferiori

Per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in $n$ sottointervalli uguali, tutti di ampiezza $\dfrac{b-a}{n}$, utilizzando i punti

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\ .$$

Se $M_i$ ed $m_i$ indicano il massimo ed il minimo di $f$ nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ (questi valori esistono, ancora grazie al teorema di Weierstrass), le quantità

$$M_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{M_i\,(b-a)}{n} \qquad \text{e} \qquad m_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{m_i\,(b-a)}{n}$$

rappresentano le misure con segno di due rettangoli che, rispettivamente, contengono e sono contenuti in $T(f, [x_{i-1}, x_i])$, cioè quella porzione di trapezoide $T(f, [a, b])$ relativa all'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ (almeno per $f$ di segno costante in $[x_{i-1}, x_i]$ questo è evidente dalla Fig. 3).

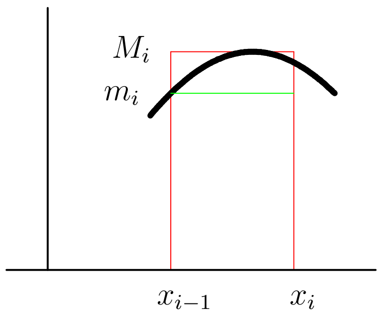


Fig. 3

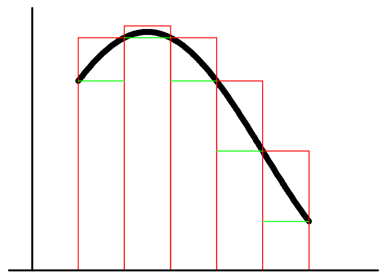


Fig. 4

**Definizione 9.1** La somma delle misure con segno del primo gruppo di $n$ rettangoli

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i$$

è detta **somma superiore** $n-$sima di $f$ relativa ad $[a, b]$.
Similmente, la

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$$

è detta **somma inferiore** $n-$sima.

Ovviamente $s_n \le S_n$ per ogni $n$, e le due somme forniscono approssimazioni (rispettivamente per eccesso e per difetto) della misura con segno di $T(f, [a, b])$, che è la quantità che vogliamo definire (vd. Fig. 4).

## ♦ Integrale definito

Al crescere di $n$ cresce il numero di intervalli e ne decresce l'ampiezza; non solo, ma accade che le sequenze numeriche $\{S_n\}$ ed $\{s_n\}$ soddisfino

$$m(b-a) = s_1 \le s_n \le S_n \le S_1 = M(b-a) \ .$$

Così, esistono sia l'estremo inferiore dell'insieme $\{S_n\}$ che l'estremo superiore dell'insieme $\{s_n\}$. Inoltre, è possibile dimostrare che l'estremo superiore delle somme inferiori coincide con l'estremo inferiore delle somme superiori, cioè

$$\inf_n S_n = \sup_n s_n \ .$$

**Definizione 9.2** Questo numero viene detto **integrale definito di $f$ in** $[a, b]$, o anche misura con segno di $T(f, [a, b])$ *e* viene indicato con il simbolo

$$\int_a^b f(x) \ dx \quad \left( = \inf_n S_n = \sup_n s_n \right) .$$

La funzione $f$ è detta *funzione integranda*, mentre $[a, b]$ è l'*intervallo di integrazione.*

<u>Nota</u>: Per definire l'integrale, non è obbligatorio ricorrere alle somme superiori o a quelle inferiori. Un altro metodo, anch'esso equivalente a questi due, è presentato a fine capitolo.

## ♦ Area

Dopo aver costruito l'integrale definito di una funzione continua, utilizziamo questo concetto per la seguente

**Definizione 9.3** L'**area** del trapezoide $T(f, [a, b])$ è definita come l'integrale definito della funzione $|f|$ (che è ancora una funzione continua) cioè

$$area \ \ (T(f, [a, b])) = \int_a^b |f(x)| \ dx \ .$$

Ovviamente, questo numero non è mai negativo.

### ⧫ Un riepilogo

Fin qui non abbiamo introdotto restrizioni sul segno di $f$, ma è interessante analizzare come l'integrale definito può essere interpretato, a seconda delle informazioni che si hanno sui segni della funzione integranda.

• Se $f$ è una funzione continua e *mai negativa* ($f \geq 0$) in $[a,b]$ (vd. Fig. 1) il trapezoide $T(f,[a,b])$ è contenuto nel semipiano superiore, e l'integrale definito $\int_a^b f(x)\ dx$ fornisce sia il valore della sua misura con segno, sia quello della sua area, che coincidono.

• Se invece $f \leq 0$ in $[a,b]$ (vd. Fig. 2) il trapezoide $T(f,[a,b])$ è contenuto nel semipiano inferiore, e tutti gli addendi presenti nelle somme superiori ed inferiori sono $\leq 0$; perciò $\int_a^b f(x)\ dx \leq 0$. Questo numero rappresenta la misura con segno del trapezoide $T(f,[a,b])$, ed è uguale all'opposto del valore dell'area.

• Se $c$ è un punto interno all'intervallo $[a,b]$, e se la funzione $f$, continua in $[a,b]$, assume valori $\geq 0$ in $[a,c]$ e valori $\leq 0$ in $[c,b]$ (vd. Fig. 5) l'integrale di $f$ in $[a,b]$ coincide con la somma

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx\ . \qquad (\clubsuit)$$

Qui, il I addendo del termine di destra è il contributo ($\geq 0$) relativo all'intervallo $[a,c]$ (in cui $f(x) \geq 0$); il II addendo è invece il contributo ($\leq 0$) relativo all'intervallo $[c,b]$.
L'integrale rappresenta la misura con segno della regione compresa l'asse $x$ ed il grafico di $f$; questa si ottiene sommando i contributi, di segno opposto, relativi agli intervalli in cui ha segno diverso. Equivalentemente, $\int_a^b f(x)\ dx$ si ottiene come differenza tra l'area del trapezoide $T(f,[a,c])$ e l'area del trapezoide $T(f,[c,b])$. In pratica, l'integrale di $f$ è un "bilancio" tra i contributi di opposto segno della funzione.
Questo numero può perciò avere segno positivo, negativo, o anche nullo (in caso di bilancio "in pareggio"); si ottiene sommando le aree delle regioni che si trovano nel semipiano superiore, e sottraendo le aree delle regioni che si trovano nel semipiano inferiore
In modo del tutto analogo la formula ($\clubsuit$) permette di interpretare $\int_a^b f(x)\ dx$ quando $f$ in $[a,b]$ è continua e cambia di segno un numero finito di volte (vd. Fig. 6).

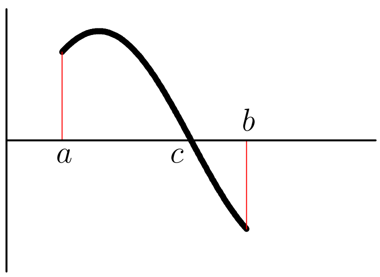



Fig. 5

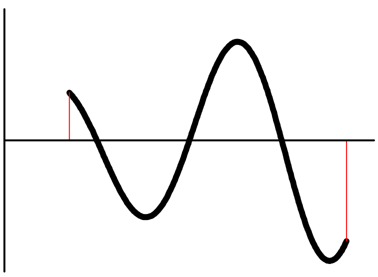


Fig. 6

• L'area del trapezoide $T(f,[a,b])$ si ottiene sommando tutte le aree coinvolte; queste hanno tutte valore $\geq 0$, indipendemente dalla loro posizione rispetto all'asse $x$ (vd. Fig. 7). Questo si riassume nella formula

$$\boxed{area\ T\left(f,[a,b]\right)=\int_a^b |f(x)|\ dx} \qquad (\spadesuit)$$

che mostra, tra l'altro, che l'area e la misura con segno coincidono se e solo se $f \geq 0$. (N.B.: l'area ha valore nullo solo quando $f(x)=0$ per ogni $x \in [a,b]$).

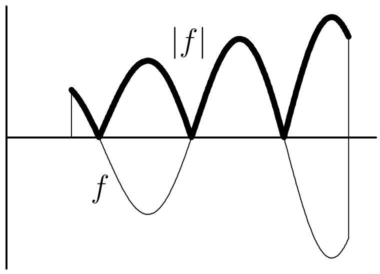



Fig. 7

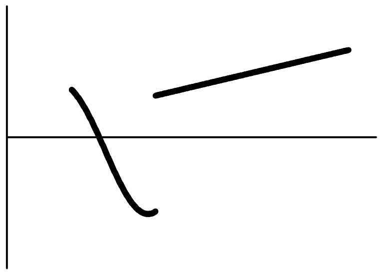


Fig. 8

• La formula ($\clubsuit$) ci permette di definire l'integrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ anche se la funzione $f$ ha nel punto $c \in (a,b)$ una discontinuità di prima specie (vd. Fig. 8). Il discorso si può estendere facilmente anche a funzioni che presentano un numero finito di queste discontinuità. Così, le funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ di cui è possibile calcolare l'integrale non devono necessariamente essere continue. [2]

• Con la formula ($\spadesuit$) possiamo anche calcolare l'area di una regione di piano delimitata dalle rette verticali $x=a$, $x=b$, e dai grafici di due funzioni continue $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se sappiamo che in $[a,b]$ vale sempre $f(x) \geq g(x)$ (vd. Fig. 9) l'area della regione che ha il grafico di $f$ come "tetto" e quello di $g$ come "pavimento" si ottiene calcolando

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\ dx.$$

Tuttavia, non è realmente importante sapere quale delle due funzioni assume il valore più grande, anzi i due grafici possono persino incrociarsi (vd. Fig. 10). Per il calcolo dell'area di questa regione è sufficiente calcolare

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\ dx.$$

La conoscenza di quale funzione ha il grafico che serve da "tetto" è semmai di utilità per il calcolo esplicito dell'area, come vedremo nell'Esempio 9.12.

[2] L'insieme delle funzioni per cui il simbolo $\int_a^b f(x)\ dx$ ha significato è molto ampio; una sua descrizione completa esula dagli scopi di queste note. Segnaliamo comunque che tutte le funzioni continue in $[a,b]$ ammettono integrale definito, anche se cambiano infinite volte di segno.

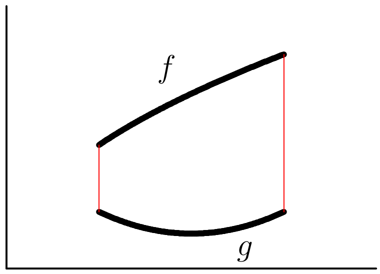



Fig. 9

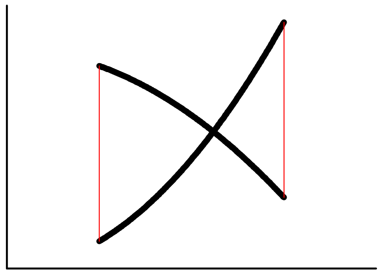


Fig. 10

## 9.2 Proprietà dell'integrale definito

• Dal significato di misura con segno dell'integrale definito è chiaro il comportamento che questo ha rispetto ad eventuali cambiamenti che si possono operare sull'intervallo di integrazione. Se $a < c < b$, ha senso parlare dell'integrale di $f$ in $[a, c]$ e in $[c, b]$ se e solo se ha senso parlare dell'integrale di $f$ in $[a, b]$ , e i tre integrali sono legati dalla (♣) , che richiamiamo:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx\ .$$

Questo comportamento viene descritto dicendo che l'integrale è **additivo rispetto agli intervalli.**

• Quando l'intervallo di integrazione ha la forma $[-b, b]$, eventuali simmetrie di $f$ possono facilitare il calcolo di $\int_{-b}^b f(x)\ dx$. Infatti, se $f$ è pari (vd. Arg. 1) i contributi degli intervalli $[-b, 0]$ e $[0, b]$ sono uguali, per cui

$$\int_{-b}^b f(x)\ dx = 2\int_0^b f(x)\ dx\ ;$$

se invece $f$ è dispari, i due intervalli $[-b, 0]$ e $[0, b]$ contribuiscono in modo opposto, e quindi

$$\int_{-b}^b f(x)\ dx = 0\ .$$

**Esempio 9.4** La funzione $f(x) = \sin x$ è dispari, per cui il suo integrale su ogni intervallo del tipo $[-b, b]$ vale 0.

• Per aumentare, ai fini del calcolo, la flessibilità della nozione di integrale è anche utile adottare le seguenti convenzioni:

$$\boxed{\int_a^a f(x)\ dx = 0} \quad ; \quad \boxed{\text{per } a < b : \quad \int_b^a f(x)\ dx\ = -\int_a^b f(x)\ dx}$$

• Un'altra proprietà utile per il calcolo: l'integrale è **lineare** rispetto alla funzione integranda, cioè:

$$\int_a^b \alpha f(x)\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$

• Un'ultima segnalazione: il nome della variabile $x$ nel simbolo $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ è puramente convenzionale; lo stesso numero è rappresentato dalle scritture $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$, $\displaystyle\int_a^b f(y)\ dy, \ldots$ Questo fatto viene riassunto dicendo che la variabile di integrazione è "muta".

## 9.3 Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Ricordiamo che, data una funzione $f$, il suo integrale indefinito è un insieme di funzioni, mentre il suo integrale definito è un numero reale. Vogliamo ora mostrare che tra questi due concetti esiste un legame.
• Se $f$ è una funzione continua in $[a, b]$, per ogni $x \in [a, b]$ possiamo calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$; questa è una quantità che dipende da $x \in [a, b]$. Abbiamo perciò costruito una funzione $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, detta **funzione integrale di** $f$, definita come:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Il seguente teorema dà il legame tra una funzione continua $f$ e la sua funzione integrale $F$.

**Teorema 9.5 (teorema fondamentale del calcolo integrale)**
*Sia $f$ continua in $[a, b]$ e sia $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ la funzione integrale di $f$. Allora:*

$$*)\ \ F \text{ è derivabile in } (a, b) \text{ ed è continua in } [a, b];$$

$$*)\ \ F'(x) = f(x) \text{ per ogni } x \in (a, b).$$

• Questa teorema completa, e precisa, quanto detto in Arg. 8 (vedi Propos. 8.3) relativamente all'esistenza di una primitiva per ogni funzione continua. Infatti, il risultato precedente può essere anche riformulato nel seguente modo:

| Sia $f$ continua in $[a, b]$ e sia $F$ la sua funzione integrale. Allora $F$ è una primitiva di $f$. |
|---|

In particolare, osserviamo che la funzione integrale $F$ è la primitiva di $f$ che vale 0 in $a$ (perchè abbiamo convenuto di porre $\displaystyle\int_a^a f(x)\, dx = 0$).

• Il seguente corollario del Teorema fondamentale del calcolo integrale fornisce un metodo per il calcolo esplicito degli integrali definiti (e un legame tra integrali indefiniti e integrali definiti, come preannunciato nella Nota iniziale).

**Corollario 9.6 (formula fondamentale del calcolo integrale)**
*Sia $f$ continua in $[a, b]$ e sia $G$ una qualunque primitiva di $f$. Allora:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = G(b) - G(a)\ .}$$

(Per comodità, la quantità $G(b) - G(a)$ viene solitamente indicata con la scrittura $[G(x)]_a^b$ ).

• Così, l'operazione di calcolo dell'integrale definito $\int_a^b f(x)\ dx$ comporta i seguenti due passi:

$$\begin{cases} i) & \text{si determina una primitiva } G \text{ della funzione } f \text{ (vd. Arg.8);} \\ ii) & \text{si calcola il numero } G(b) - G(a)\text{, che coincide con l'integrale cercato.} \end{cases}$$

Conviene osservare che il numero $\int_a^b f(x)\ dx$ non dipende dalla primitiva di $f$ che abbiamo scelto. Infatti, tutte le primitive di $f$ differiscono per costanti additive, e queste costanti vengono eliminate quando si calcola la differenza tra i valori assunti dalla primitiva scelta nei punti $x = a$ e $x = b$.

### ♦ Esempi

**9.7** Calcoliamo $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\, dx$ .

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c \qquad \text{quindi} \qquad \int_0^\pi \sin x\, dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2.$$

Poichè $\sin x \geq 0$ per $0 \leq x \leq \pi$ (vd. Fig. 11), l'integrale trovato rappresenta l'area della regione di piano compresa tra l'asse $x$, il grafico della funzione, e le rette $x = 0$ e $x = \pi$.
Utilizzando questo risultato e quanto visto nell'Esempio 9.4, possiamo anche dedurre che il trapezoide $T(\sin x, [-\pi, \pi])$ ha misura con segno nulla (perchè $\sin x$ è dispari) ed area 4 (perchè $|\sin x|$ è pari).

**9.8** Calcoliamo $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\, dx$ (vd. Fig. 12).

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + c \qquad \text{quindi} \qquad \int_1^e \frac{1}{x}\, dx = [\log|x|]_1^e = \log e - \log 1 = 1\ .$$

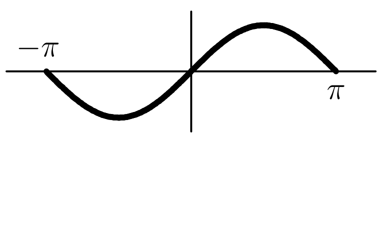



Fig. 11

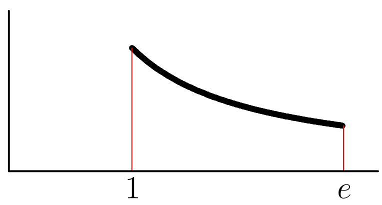



Fig. 12

**9.9** Calcolare l'area della regione piana $A$ compresa tra le rette verticali di equazioni $x = -1/2$, $x = 3/2$, l'asse $x$ ed il grafico della funzione $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.
La regione può essere descritta come $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2},\ 0 \le y \le 3x^2 - 2x + 1\right\}$. La funzione $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ non assume mai valori negativi (vd. Fig. 13), per cui l'area di $A$ si ottiene come

$$\int_{-1/2}^{3/2} \left(3x^2 - 2x + 1\right)\ dx = \left[x^3 - x^2 + x\right]_{-1/2}^{3/2} = \left(\frac{27}{8} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}\ .$$

**9.10** Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\ dx$ , dove $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ 6 - x & \text{se } 1 < x \le 3 \end{cases}$ .
La funzione è continua in $[-1,1) \cup (1,3]$ , e in $x = 1$ ha una discontinuità di I specie (vd. Fig. 14). Perciò

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} f(x)\ dx &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 + 2x\right)\ dx + \int_{1}^{3} (6 - x)\ dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-1}^{1} + \left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{3} \\ &= \left[\left(\frac{1}{3} + 1\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right)\right] + \left[\left(18 - \frac{9}{2}\right) - \left(6 - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{26}{3}\ .\end{aligned}$$

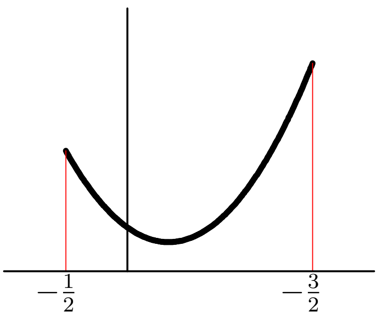


Fig. 13

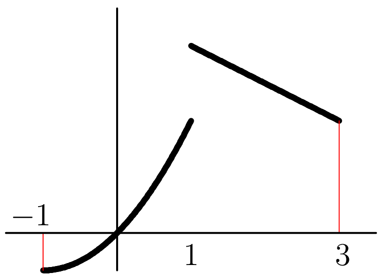


Fig. 14

**9.11** Calcolare l'area della regione $C$ racchiusa dalle curve $y = 2\sqrt{x} - 3$, $y = -1$ e $y = 5 - x$.
Le tre curve si intersecano, a due a due, nei punti $(1,-1)$ , $(6,-1)$ e $(4,1)$ (vd. Fig. 15). La regione $C$, di cui vogliamo calcolare l'area, si ottiene come unione delle regioni $A = \{1 \le x \le 4,\ -1 \le y \le 2\sqrt{x} - 3\}$ e $B = \{4 \le x \le 6,\ -1 \le y \le 5 - x\}$ . Così, per la regione $A$ il "tetto" è rappresentato dal grafico di $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$, mentre per $B$ questo ruolo è ricoperto dal grafico di $h(x) = 5 - x$. In entrambi i casi il grafico di $g(x) = -1$ è il "pavimento". Quindi

$$\begin{aligned}\mathit{area}\ (A) &= \int_{1}^{4} \left[\left(2\sqrt{x} - 3\right) - (-1)\right]\ dx = \int_{1}^{4} 2\left(\sqrt{x} - 1\right)\ dx \\ &= 2\left[\frac{2}{3}x^{3/2} - x\right]_{1}^{4} = \frac{10}{3}\ .\end{aligned}$$

Per la regione $B$ possiamo ancora impostare il calcolo dell'integrale

$$\mathit{area}\ (B) = \int_{4}^{6} \left[(5 - x) - (-1)\right]\ dx\ ,$$

Per la regione $B$ possiamo ancora impostare il calcolo dell'integrale

$$area\ (B) = \int_4^6 [(5-x)-(-1)]\ dx\ ,$$

ma è forse più semplice osservare che si tratta di un triangolo rettangolo i cui cateti hanno entrambi lunghezza 2, per cui l'area di $B$ vale 2. In totale,

$$area\ (C) = area\ (A) + area\ (B) = \frac{10}{3} + 2 = \frac{16}{3}\ .$$

**9.12** Calcolare l'area della regione $C$ racchiusa dalle due rette verticali $x=1$, $x=3$, e dalle due curve $y=x^2$, $y=6-\dfrac{x^2}{2}$. La formula

$$area\ (C) = \int_1^3 |f(x)-g(x)|\ dx$$

è difficilmente utilizzabile per il calcolo dell'integrale; conviene capire dove i grafici delle due curve si intersecano. Ciò avviene nel punto $(2,4)$, ed osservando la Fig.16 abbiamo

$$\begin{aligned} area\ (C) &= \int_1^2 \left[\left(6-\frac{x^2}{2}\right)-x^2\right]\ dx + \int_2^3 \left[x^2-\left(6-\frac{x^2}{2}\right)\right]\ dx \\ &= \int_1^2 \left(6-\frac{3x^2}{2}\right)\ dx + \int_2^3 \left(\frac{3x^2}{2}-6\right)\ dx \\ &= \left[6x-\frac{x^3}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{2}-6x\right]_2^3 = \frac{5}{2}+\frac{7}{2} = 6\ . \end{aligned}$$

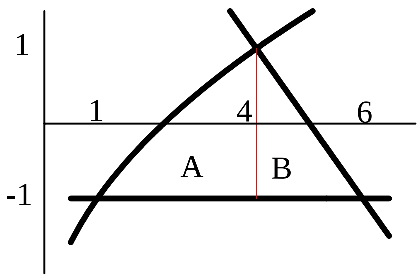


Fig. 15

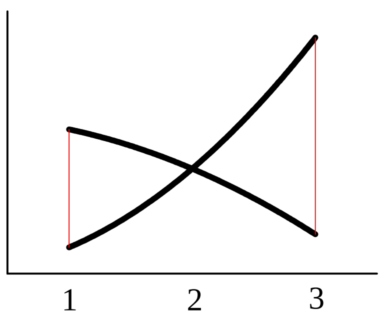


Fig. 16